حل چند مسئله در احتمال

سیدجمال بخشایش
سرگروه آموزشی ریاضی استان چهارمحال‌وبختیاری

اشاره
بعـــد از تألیف جدید کتاب‌های درســـی ریاضی ابتدایی و متوســـطه اول، موضوعاتی مانند «احتمال» وارد کتاب‌های درسی شدند. احتمال از آن دست موضوعاتی است که بسیار گسترده بوده و می‌تواند از آن، سؤال‌هایی طرح شود که بحث‌برانگیز باشد. از آنجایی که تنها مقدمات اولیهٔ آن در کتاب‌های درســـی ریاضی آمده است و برخی از عناوین و مسائل آن برای دبیران محترم ابهاماتـــی دارند، مانند ارتباط احتمال بـــا مجموعه‌ها در فصل اول کتاب ریاضی پایه نهم، بر آن شدیم تا مبانی احتمال مورد نیاز کتاب‌های درسی ریاضی ابتدایی و متوسطه اول را با استفاده از شیوهٔ آموزش مبتنی بر حل مسئله، بررسی نماییم.

کلیدواژه‌ها: احتمال، آزمایش تصادفی، فضای نمونه، پیشامدها، حل مسئله

مسئله ۱

در پرتاب یک تاس، احتمال آن را به‌دست آورید که عدد رو شده، عددی مرکب[1] شود؟

حل مسئله ۱

در ایـــن مســـئله؛ پرتاب یک تاس یـــک آزمایش تصادفی است که باید تمام حالت‌های ممکنِ رو آمدن یک تاس را مشخص نماییم.

تعریف ۱

آزمایش تصادفی؛ آزمایشـــی اســـت که همه نتیجه‌های ممکن آن، قبل از انجام آزمایش مشـــخص اســـت، اما قبل از انجام آزمایش، معلوم نیســـت کدام نتیجه رخ خواهد داد که بتوان آن آزمایش را در شرایط یکسان و به دفعات دلخواه انجام داد.

فضای نمونه: مجموعهٔ تمـــام حالت‌هایی را که ممکن است در یک آزمایش تصادفی رخ دهند، فضای نمونهٔ آن آزمایش می‌گویند و با S نمایش می‌دهند. (۱)

همهٔ حالت‌های ممکنِ عدد رو شده در پرتاب یک تاس $S=\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ است، پس $n(S)=۶$.

برای به‌دســـت آوردن احتمال آن که عدد رو شدهٔ تاس، عددی مرکب باشد، باید پیشامدی را بدین منظور تشکیل دهیم.

پیشـامد A را حالت‌هایی از عدد تـاس در نظر می‌گیریم که عددی مرکب باشند. مجموعهٔ $A=\{۴, ۶\}$ به‌دست می‌آید.

بنابراین، تعداد حالت‌های مطلوب $n(A)=۲$ است.

تعریف ۲

احتمال؛ شـانس وقوع یک پیشامد در انجام یک آزمایش تصادفی است. اگر آزمایشـی بتواند در $n(S)$ حالت برابر تصادفی نتیجه شود و اگر $n(A)$ مورد از این حالت‌ها برای پیشامد A مطلوب باشند، احتمال پیشامد A عبارت است از:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

پس احتمال پیشـامد A به صورت زیر به‌دسـت می‌آید:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۶}$$

مسئله ۲

در پرتاب یک سـکه و یک تـاس، احتمال آن را به‌دست آورید که؛

الف) سکه رو و تاس عددی کوچک‌تر از ۳ شود.

ب) سکه پشت یا تاس عددی زوج شود.

حل مسئله ۲

حالت‌های ممکن پرتاب یک تاس، اعداد $S_1=\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ خواهد بود و حالت‌های ممکن پرتاب یک سکه نیز $S_2=\{پ , ر\}$ است. چون دو پرتاب داریم، برای رسیدن به حالت‌های ممکـن، باید دو کار با هم انجام شـوند، بنابراین برای به‌دست آوردن تعداد کل حالت‌های ممکن، باید از اصل ضرب استفاده کرد.

تعریف ۳

اصل ضرب؛ اگر پیشامدی را بتوان به دو پیشامد پشـت سـر هم A_1 و A_2 تقسـیم کرد به‌طوری که پیشـامد A_1 به n طریق مختلف و پیشـامد A_2 به m طریق مختلف انجام گیرند، تعداد کل حالت‌های ممکن پیشامد اصلی به $n\times m$ طریق صورت می‌پذیرد. (۲)

پس تعداد کل حالت‌های ممکن پرتاب یک سکه و یک تاس $n(S)=۲\times۶=۱۲$ است.

همه حالت‌های ممکن پرتاب یک سکه و یک تاس در جدول ۱ به‌صورت زیر آمده است

جدول ۱. همه حالت‌های ممکن پرتاب یک سکه و یک تاس.

+	۱	۲	۳	۴	۵	۶
ر	۱- ر	۲- ر	۳- ر	۴- ر	۵- ر	۶- ر
پ	۱- پ	۲- پ	۳- پ	۴- پ	۵- پ	۶- پ

الف) پیشامد A را رو بودن سکه و عددی کوچک‌تر از ۳ شدن تاس، در نظر می‌گیریم. با استفاده از جدول ۱، آن حالت‌هایی را که سکه رو و عدد تاس کوچک‌تر از ۳ است را می‌شماریم.

جدول۲. حالت‌هایی که سکه رو و عدد تاس کوچکتر از ۳ است

+	۱	۲	۳	۴	۵	۶
ر	۱- ر	۲- ر	۳- ر	۴- ر	۵- ر	۶- ر
پ	۱- پ	۲- پ	۳- پ	۴- پ	۵- پ	۶- پ

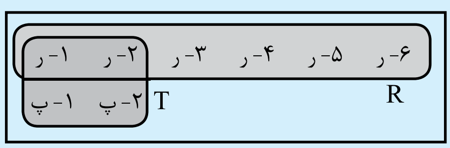
بنابراین، طبق جدول۲، تعداد حالت‌های مطلوب $n(A)=۲$ است. پس احتمال پیشامد A به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P(A)=\frac{۲}{۱۲}$$

اما آیا راه‌حل دیگری برای این مسئله وجود ندارد؟ در جـواب می‌تـوان گفت که می‌شـود از طریق اشـتراک دو مجموعه نیز این مسئله را حل نمود. اما چطور؟

پیشـامد R را رو بودن سـکه و ایـن که تاس هر عدد دلخواه از ۱ تا ۶ شـود و پیشامد T را تاس عددی کوچک‌تر از ۳ و سـکه ر یا پ شود، در نظر می‌گیریم. مجموعهٔ این دو پیشامد را در نمودار ۱ نمایش می‌دهیم.

نمودار ۱. نمودار ون دو مجموعهٔ R و T



حال اینکه هم سـکه رو بیایـد و هم تاس عددی کوچک‌تر از ۳ شود، در واقع اشتراک دو مجموعه $R\cap T$ هسـت که تعداد حالت‌های مطلـوب $n(R\cap T)=۲$ می‌شود.

آزمایش تصادفی؛ آزمایشی است که همه نتیجه‌های ممکن آن، قبل از انجام آزمایش مشخص است، اما قبل از انجام آزمایش، معلوم نیست کدام نتیجه رخ خواهد داد که بتوان آن آزمایش را در شرایط یکسان و به دفعات دلخواه انجام داد

تعریف ۴

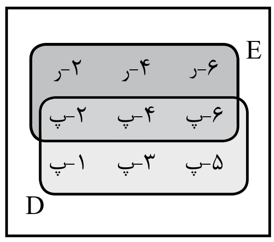
اشتراک دو مجموعه؛ اشتراک دو مجموعهٔ A و B، مجموعه‌ای شامل همهٔ عضوهایی است که هم عضو مجموعهٔ A و هم عضو مجموعهٔ B است. (۳)

پس احتمال پیشامد $R\cap T$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P(R\cap T)=\frac{۲}{۱۲}$$

ب) برای به‌دست آوردن احتمال آنکه سکه پشت یا تاس عددی زوج شود، از مجموعه‌ها استفاده می‌کنیم. پیشامد D را برای پشـــت بودن سکه و اینکه تاس هر عددی از ۱ تا ۶ داشـــته باشد، در نظر گرفته و پیشامد E را برای آن که تاس عددی زوج و ســـکه ر یا پ شود فـــرض می‌کنیم. مجموعهٔ دو پیشـــامد را در نمودار ۲ نمایش می‌دهیم.

نمودار ۲. نمودار ون دو مجموعهٔ D و E



حال اینکه سکه پشـــت یا تاس عددی زوج شود، در واقع اجتماع دو مجموعه $D\cup E$ هســـت که تعداد حالت‌های مطلوب $n(D\cup E)=۹$ می‌شود.

تعریف ۵

اجتماع دو مجموعه؛ اجتماع دو مجموعهٔ A و B، مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهایی که حداقل در یکی از دو مجموعهٔ A و B باشد. (۳)

پس احتمال پیشامد $D\cup E$، به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P(D\cup E)=\frac{۹}{۱۲}$$

مسئله ۳

در پرتاب دو تاس، احتمال آن را به‌دست آورید که؛

الف) مجموع اعداد رو شده عددی اول شود.

ب) مجموع اعداد رو شده، زوج و بزرگ‌تر از ۷ شود.

حل مسئله ۳

چون دو تاس را پرتاب می‌کنیم و عددهای رو شدهٔ دو تاس مدنظر ماست، پس تعداد کل حالت‌های ممکن برای پرتاب دو تاس $n(S)=۶×۶=۳۶$ می‌شود. ۶ تعداد حالت‌های ممکن تاس اولی و ۶ تعداد حالت‌های ممکن تاس دومی است که در هم ضرب شده‌اند.

سپس چون جمع اعداد رو شده در مسئله خواسته شـــده است، جدول ۳ را برای مجموع اعداد رو شدهٔ دو تاس تشکیل می‌دهیم.

جـــدول ۳. همه حالت‌های ممکن مجموع اعداد رو شـــدهٔ پرتاب دو تاس

+	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲

اعداد ردیف بالا مربوط به عددهای تاس اول و اعداد ستون سمت چپ مربوط به عددهای تاس دوم هستند.

نکته قابل توجه در پرتاب دو تاس این است که مثلاً برای اعداد ۱ و ۲ که ظاهر می‌شوند و مجموع آن‌ها عدد ۳ است، باید دو حالت متفاوت در نظر گرفته شود.

چون عدد ۱ از تاس اول همراه با عدد ۲ از تاس دوم یک حالت و عدد ۲ از تاس اول همراه با عدد ۱ از تاس دوم یک حالت دیگر است.

الف) پیشامد A را مجموع اعداد رو شدهٔ اول در نظر می‌گیریم. با استفاده از جدول ۳، آن مجموعه‌هایی را که عددی اول شده است، می‌شماریم.

توجه باید کرد که خود دو عدد می‌توانند غیر اول باشند، زیرا مهم مجموع دو رو شده است.

جدول ۴. حالت‌های که مجموع اعداد رو شدهٔ اول باشد

+	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲

بنابراین طبق جـــدول۴، تعداد حالت‌های مطلوب $n(A)=۱۵$ است. پس احتمال پیشامد A به‌صورت زیر به‌دست می‌آید: $P(A)=\frac{۱۵}{۳۶}$

ب) پیشـــامد B را مجموع اعداد رو شـــدهٔ زوج و بزرگ‌تر از ۷ در نظر می‌گیریم. با استفاده از جدول ۳، آن مجموع‌هایی که هم عددی زوج و هم بزرگ‌تر از ۷ است را می‌شماریم.

جـــدول ۵. حالت‌های که مجموع اعداد رو شـــدهٔ زوج و بزرگ‌تر از ۷ باشد

+	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲

یعنـــی طبق جدول ۵، تعـــداد حالت‌های مطلوب $n(B)=۹$ اســـت. پس احتمال پیشامد B به‌صورت زیر به‌دست می‌آید: $P(B)=\frac{۹}{۳۶}$

مسئله ۴

تاســـی را ۱۰۰ بار پشت سر هم پرتاب می‌کنیم، احتمال آن را به‌دست آورید که عدد تاس پرتاب اولی، بزرگ‌تر از عدد تاس پرتاب آخری شود.

حل مسئله ۴

آزمایش تصادفی این مسئله، پرتاب ۱۰۰ بار یک تاس اســـت. از آنجایی که پرتاب هر بار تاس مستقل از پرتاب بعدی اســـت، یعنی فقط پرتاب‌های اول و آخر مهم می‌شوند.

پس مسئله به دو بار پرتاب تبدیل می‌شود که باید عدد پرتاب اولی، بزرگ‌تر از عدد پرتاب دومی شود.

تعریف ۶

دو پیشـــامد مستقل؛ دو پیشامد A و B از یک فضای نمونه‌ای را مستقل از هم گویند، هرگاه وقوع یکی بر دیگری، بی‌تأثیر باشد. (۱)

چـــون دو بار تاس را پرتاب می‌کنیم و عددهای رو شدهٔ دو تاس مدنظر ماست، پس تعداد کل حالت‌های ممکن این آزمایش $n(S)=۶×۶=۳۶$ می‌شود.

پیشامد C را حالت‌هایی از کل حالت‌های ممکن در نظر می‌گیریم که در آن، عدد پرتاب اولی از عدد پرتاب دومی بزرگ‌تر باشد. با استفاده از جدول ۶، حالت‌های پیشامد C را می‌شماریم.

بنابرایـــن طبق جدول ۶، تعداد حالت‌های مطلوب $n(C)=۱۵$ است. پس احتمال پیشامد C به‌صورت زیر به‌دست می‌آید: $P(C)=\frac{۱۵}{۳۶}$

جدول ۶. حالت‌های که عدد پرتاب اولی از عدد پرتاب دومی بزرگ‌تر باشد

+	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۱, ۱	۱, ۲	۱, ۳	۱, ۴	۱, ۵	۱, ۶
۲	۲, ۱	۲, ۲	۲, ۳	۲, ۴	۲, ۵	۲, ۶
۳	۳, ۱	۳, ۲	۳, ۳	۳, ۴	۳, ۵	۳, ۶
۴	۴, ۱	۴, ۲	۴, ۳	۴, ۴	۴, ۵	۴, ۶
۵	۵, ۱	۵, ۲	۵, ۳	۵, ۴	۵, ۵	۵, ۶
۶	۶, ۱	۶, ۲	۶, ۳	۶, ۴	۶, ۵	۶, ۶

مسئله ۵

خانواده‌ای دارای سه فرزند است.

الف) اگر بدانیم دو فرزند اول خانواده پسر هستند، احتمال آن را به‌دســـت آورید که فرزند ســـوم خانواده دختر باشد.

ب) اگر بدانیم دو فرزند این خانواده پســـر هستند، احتمال آن را به‌دســـت آورید که فرزند دیگر خانواده دختر باشد.

حل مسئله ۵

الف) در این خانوادهٔ ســـه فرزنـــدی، اگر بدانیم دو فرزند اول پسر هستند، تنها جنسیت فرزند سوم خانواده مورد نظر واقع می‌شود که یا فرزند سوم پسر است که حالت آن «پسر- پســـر- پسر» می‌شود، یا فرزند سوم دختر است که حالت آن «پسر- پسر- دختر» می‌شود. پس طبق جدول، همهٔ حالت‌های ممکن سه فرزند این خانواده ۲ حالت است.

جدول ۷. فرزند اول و دوم پسر و حالت‌های فرزند سوم

فرزند اول	فرزند دوم	فرزند سوم	حالت
پسر	پسر	پسر	۱
پسر	پسر	دختر	۲

حال پیشامد A را دختر بودن فرزند سوم خانواده در نظر می‌گیریم که طبق همهٔ حالت‌ها{پ پ د}=A است، پس ۱=n(A) می‌شـــود. بنابراین احتمال دختر بودن فرزند سوم به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P(A)=\frac{۱}{۲}$$

ب) در این خانوادهٔ ســـه فرزندی، اگر بدانیم که دو فرزند آن‌ها پسر هست، اما ندانیم که فرزندهای چندم پسر هستند، همهٔ حالت‌های فرزندهای این خانواده به صورت زیر است:

۱. فرزند اول و دوم پسر:

جدول ۸. فرزند اول و دوم پسر و حالت‌های فرزند سوم

فرزند اول	فرزند دوم	فرزند سوم	حالت
پسر	پسر	پسر	۱
پسر	پسر	دختر	۲

۲. فرزند اول و سوم پسر:

جدول ۹. فرزند اول و سوم پسر و حالت‌های فرزند دوم

فرزند اول	فرزند دوم	فرزند سوم	حالت
پسر	پسر	پسر	۱
پسر	دختر	پسر	۲

۳. فرزند دوم و سوم پسر:

جدول ۱۰. فرزند دوم و سوم پسر و حالت‌های فرزند اول

فرزند اول	فرزند دوم	فرزند سوم	حالت
پسر	پسر	پسر	۱
دختر	پسر	پسر	۲

که طبق جدول‌هـــای ۸، ۹ و ۱۰ همهٔ حالت‌های ممکن سه فرزند این خانواده به‌صورت زیر است:

S ={د پ پ , پ د پ , پ پ د , پ پ پ}

که ۴=n(S) است.

حال پیشامد B را دختر بودن فرزند دیگر خانواده در نظر می‌گیریم که طبق همهٔ حالت‌ها؛

B ={د پ پ , پ د پ , پ پ د}

می‌شود. پس ۳=n(B) است. یعنی احتمال دختر بودن فرزند دیگر خانواده به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P(B)=\frac{۳}{۴}$$

مسئله ۶

در کیســـه‌ای ۳ مهرهٔ سیاه و ۲ مهرهٔ سفید داریم، احتمال آن را به‌دست آورید که؛

الف) اگر بخواهیم یک مهره از کیسه بیرون بیاوریم، مهره سفید باشد.

ب) اگر بخواهیم دو مهره از کیسه بیرون بیاوریم، هر دو مهره همرنگ باشند.

حل مسئله ۶

الف) در پرتاب یک تاس، احتمال ظاهر شـــدن هر یـــک از اعداد ۱ تا ۶ برابر $\frac{۱}{۶}$ اســـت، این گونه فضای نمونه‌ای را هم‌شانس گویند.

تعریف ۷

پیشامدهای هم‌شانس؛ فرض کنید فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی به‌صورت $S=\{s_۱, s_۲, s_۳, ..., s_n\}$ باشد که در آن، s_i ها حالت‌های آزمایش مورد نظر باشند، اگر $P(s_۱)=P(s_۲)=...=P(s_n)=\frac{۱}{n}$، فضای مـــورد نظر را هم‌شانس گویند. اما اگر احتمال حالت‌ها برابر نباشد، فضا را غیرهم‌شانس گویند.

در هـــر صـــورت چه فضا هم‌شـــانس باشـــد چه غیرهم‌شانس خواهیم داشت:

$$P(s)=۱\Rightarrow$$
$$P(s_۱)+P(s_۲)+...+P(s_n)=۱$$

یعنی مجموع احتمال تمام حالت‌ها، ۱ است.

پس در این آزمایش تصادفی، احتمال بیرون آمدن اینکه، مهره‌ای سیاه یا سفید بیرون بیاید، غیرهم‌شانس اســـت. اما احتمال بیرون آمدن مهره‌ای سفید چقدر است؟

از آنجایی که نسبت تعداد مهره‌های سیاه به سفید ۳ به ۲ است، پس اگر احتمال بیرون آمدن مهرهٔ سیاه را با P(b) و احتمال بیرون آمدن مهرهٔ ســـفید را P(w) نمایش دهیم، داریم:

$$۳.P(w)=۲.P(b)$$

و از طرفـــی چون مجمـــوع دو احتمال باید ۱ شـــود، (۱=P(w)+P(b)) داریم:

$$P(w)+P(b)=$$
$$\frac{۲}{۳}P(b)+P(b)=\frac{۵}{۳}P(b)=۱\Rightarrow$$
$$P(b)=\frac{۳}{۵}\Rightarrow P(w)=\frac{۲}{۵}$$

آیا می‌شـــود فضای نمونه‌ای این آزمایش را به یک فضای نمونه‌ای هم‌شانس تبدیل کرد؟

در جواب این سؤال، می‌شود گفت که؛ اگر مهره‌ها را به‌صـــورت جـــدا از هـــم در نظر بگیریـــم و آن‌ها را شماره‌گذاری نماییم، یعنی؛

$S=\{b_۱, b_۲, b_۳, w_۱, w_۲\}$

در این صورت، پنج مهره خواهیم داشـــت که احتمال بیرون آمدن هر کدام از آن مهره‌ها، با هم برابر است:

$$P(b_۱)=P(b_۲)=P(b_۳)=P(w_۱)=P(w_۲)=\frac{۱}{۵}$$

حال پیشـــامد A را حالت‌هایی از فضای نمونهٔ S در نظر می‌گیریم که رنگ مهره‌ها سفید باشد. بنابراین $A=\{w_۱, w_۲\}$ است که تعداد آن $n(A)=۲$ می‌شود. پس احتمال بیرون آمدن مهره‌ای ســـفید، چنین محاسبه می‌شود. $P(A)=\frac{۲}{۵}$

ب) برای انتخاب دو مهره، ابتدا باید فضای نمونه‌ای انتخاب دو مهره از میان پنج مهره را تشکیل دهیم. همهٔ حالت‌های انتخاب دو مهره از کیسه، به‌صورت زیر است:

$$S=\left\{\begin{matrix} b_۱b_۲, b_۱b_۳, b_۲b_۳, b_۱w_۱, b_۱w_۲, \\ b_۲w_۱, b_۲w_۲, b_۳w_۱, b_۳w_۲, w_۱w_۲ \end{matrix}\right\}$$

پیشامد B را حالت‌هایی از بیرون آمدن دو مهره در نظر می‌گیریم که دو مهره همرنگ باشند. پس؛

$$B=\{b_۱b_۲, b_۱b_۳, b_۲b_۳, w_۱w_۲\}$$

بنابراین تعداد حالت‌های مطلوب $n(B)=۴$ اســـت. احتمال این پیشامد، به این صورت به‌دست می‌آید:

$$P(b)=\frac{۴}{۱۰}$$

اما آیا راه‌حل دیگری برای این مسئله وجود ندارد؟

می‌توان فرض نمـــود که مهره‌هـــا را یکی‌یکی از کیسه بیرون می‌آوریم. بنابراین دو حالت برای مهرهٔ اول به‌دست می‌آید:

۱. یا مهرهٔ اول سیاه است.

اگر مهره اول ســـیاه باشد که احتمال آن $\frac{۳}{۵}$ است. برای بیرون آوردن مهرهٔ بعدی که همرنگ اولی باشـــد یعنی آن هم ســـیاه باشد، یکی از کل مهره‌ها کم شده $(n(S)=۴)$ و همچنین یکی از مهره‌های سیاه $(n(b)=۲)$. پس برای به‌دست آوردن احتمال هر دو مهره، احتمال سیاه بودن مهرهٔ اول را در احتمال سیاه بودن مهرهٔ دوم ضرب می‌کنیم؛

$$P(b)=\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۴}=\frac{۳}{۱۰}$$

۲. یا مهرهٔ اول سفید است.

اگر مهره اول سفید باشد که احتمال آن $\frac{۲}{۵}$ است. برای بیرون آوردن مهرهٔ بعدی که همرنگ اولی باشـــد یعنی آن هم ســـفید باشـــد، یکـــی از کل مهره‌ها کم شـــده $(n(S)=۴)$ و همچنین یکی از مهره‌های سفید $(n(w)=۱)$ پس احتمال آن؛

$$P(w)=\frac{۲}{۵}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۱۰}$$

پس برای رســـیدن به جواب که مهره‌ها هر دو سیاه یا هر دو سفید باشند، باید دو احتمال بالا را جمع نماییم؛

$$P(B)=P(b)+P(w)=\frac{۳}{۱۰}+\frac{۱}{۱۰}=\frac{۴}{۱۰}$$

مسئله ۷

مجموعهٔ $B=\{۱, ۲, ۳, ..., ۱۰۰\}$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم یک زیر مجموعهٔ غیرتهی از زیرمجموعه‌های آن انتخاب کنیم. احتمـــال آن که زیر مجموعه‌ای که انتخاب می‌شود مجموع عضوهایش عددی زوج شود، چقدر است؟

حل مسئله ۷

برای حل این مسئله، از راهبرد حل مسئلهٔ ساده‌تر استفاده می‌کنیم و نتیجهٔ آن را برای این مسئله تعمیم می‌دهیم. بدین منظور، مسئلهٔ زیر را که طبق شرایط مســـئله هســـت، برای مجموعهٔ چهار عضوی A حل می‌کنیم.

مسئلهٔ جدید: مجموعـــهٔ $A=\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ را در نظر بگیریـــد. می‌خواهیم یک زیر مجموعهٔ غیرتهی از زیرمجموعه‌های آن انتخاب کنیم. احتمال آن که زیر مجموعه‌ای که انتخاب می‌شـــود، مجموع عضوهایش عددی زوج شود، چقدر است؟

مجموعهٔ A یک مجموعهٔ ۴ عضوی است، بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های آن، $۱۶=۲^۴$ تا است. $(n(s)=۱۵)$

پیشامد L را زیرمجموعه‌های غیرتهی که مجموع عضوهایشـــان عددی زوج شود در نظر می‌گیریم. برای این منظور حالت‌های زیر را بررسی می‌کنیم:

۱. زیرمجموعه‌هایی که اعداد زوج دارند:

$\{۲\}, \{۴\}, \{۲, ۴\}$

۲. زیرمجموعه‌هایی که دو عدد فرد دارند:

$\{۱, ۳\}$

۳. زیرمجموعه‌هایی کـــه دو عدد فرد و اعداد زوج دارند (ترکیبی از دو زیرمجموعهٔ بالا):

$\{۱, ۳, ۲\}, \{۱, ۳, ۴\}, \{۱, ۳, ۲, ۴\}$

بنابراین

$n(L)=۳+۱+۳=۷$: تعداد زیرمجموعه‌هایی که مجموع عضوهایشان عددی زوج است

پس احتمال پیشـــامد L به صورت زیر به‌دســـت می‌آید:

$$P(L)=\frac{۷}{۱۵}$$

نتیجه

حال زیرمجموعه‌های غیرتهـــی از مجموعهٔ A را بررسی کنیم که مجموع عضوهایشان، عددی فرد شود. برای مجموع فرد، حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. زیرمجموعه‌هایی که یک عدد فرد دارند:

$\{۱\},\{۳\}$

۲. زیرمجموعه‌هایی که یک عدد فرد و اعداد زوج دارند:

$\{۱,۲\},\{۱,۴\},\{۳,۲\},\{۳,۴\},\{۱,۲,۴\},\{۳,۲,۴\}$

بنابراین

$۲+۶=۸$ = تعداد زیرمجموعه‌هایی که مجموع عضوهایشان عددی فرد است

از ایـــن رابطـــه، می‌توان نتیجـــه گرفت که نصف زیرمجموعه‌های مجموعهٔ ۴ عضوی مجموعهٔ A، مجموع عضوهایشان فرد و یکی کمتر از نصف زیرمجموعه‌های آن، مجموع عضوهایشان عددی زوج است.

از ایـــن نتیجه‌گیری می‌توان برای حل مســـئلهٔ ۷ کمک گرفت.

طبق نتیجهٔ گرفته شده، می‌شود فهمید که یکی کمتر از نصـــف تعداد زیر مجموعه‌هـــای آن، مجموع عضوهایشان عددی زوج خواهد شد. این مجموعه $۲^{۱۰۰}$ زیرمجموعـــه دارد که نصـــف زیرمجموعه‌هایش $۲^{۹۹}$ می‌شود، پس

$$P=\frac{۲^{۹۹}-۱}{۲^{۱۰۰}-۱}$$

پی‌نوشت

۱. اگـــر بتوانیم عددی طبیعی را به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک بنویســـیم، عدد مورد نظـــر، اول نخواهد بود و به چنین عددی، عدد مرکب می‌گویند. **ریاضی پایه هشتم**، چاپ ۱۳۹۶، ص ۲۱.

منابع

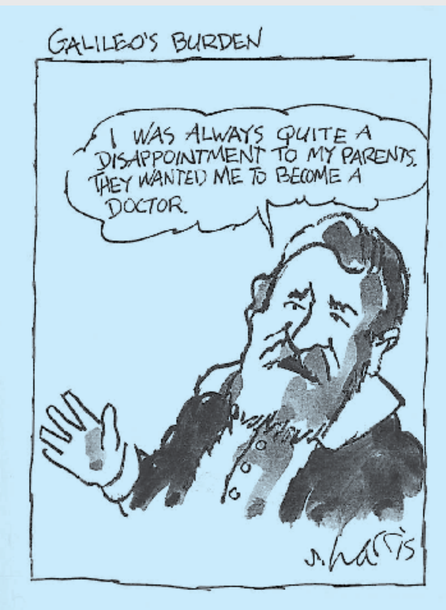
1. Ross, Sheldon. Introduction of Probability Models; (2010). 10th edition. Academic Press.

۲. آزرمسا، سیداحسان و موســـوی، نگین‌السادات. (۱۳۹۲). **حل یک مسئله ترکیبیات شمارشی**. خوشخوان.

۳. ریاضـــی پایه نهم دوره اول متوســـطه، دفتر تألیف کتاب‌های درسی ریاضی، شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۹۵.

بارمسئولیت

مـــن همیشـــه باعث یـــأس و نومیدی پدر و مادرم بودم. آن‌ها می‌خواستند که من، پزشک شوم.



حاشیه نوشته‌ام بیشتر از این جا ندارد، وگرنه می‌توانم ثابت کنم که a+b=c می‌شود!